

Besitzt die Mathematik endgültiges Wissen?

Brief im Anschluss an einen kurzen Diskurs während eines Satsangs

14. Dezember 2022

Liebe Pyar,

anlässlich unseres kurzen Austauschs über Wissenschaftstheorie / Mathematik während des Satsangs am vergangenen Samstag möchte ich gern ein paar vertiefende Worte nachreichen.

Du hattest dich gefreut über die Redlichkeit der Wissenschaftler, da sie stets zugeben, dass ihr Wissen nur vorläufiger Natur sein kann und durch spätere Einsichten immer überholt oder relativiert werden kann. Als du mich zu diesem Thema angesprochen hast, habe ich das im Grunde bestätigt, aber die Mathematik als Ausnahme reklamiert. Als du von Statistik anfingst, habe ich nachgeschoben, dass ich die reine Mathematik meine, und dass die reine Mathematik keine Aussagen über die Wirklichkeit macht und sich deshalb leicht damit tut, recht zu behalten. Nach diesem kurzen Diskurs kann man sich erstens fragen, welche Art von Wissen das denn sein soll, das die Mathematik erzeugt bzw. hat, wenn es nicht ein Wissen über die Wirklichkeit ist, und zweitens, woher sie diese Gewissheit der Endgültigkeit ihres Wissens nimmt.

Wäre die Mathematik auf dem Stand von 1900, hätte ich so eine stolze Aussage nicht gewagt. Aber das Selbstverständnis der Mathematik hat sich im Zug des "Linguistic Turn" um die Zwanzigerjahre radikal gewandelt. Durch die Bemühungen von Frege, Hilbert, Russell und andere ist es gelungen, praktisch die gesamte Mathematik zu formalisieren. Das heißt, man fand Regelsysteme zur Transformation von Zeichenreihen ("Kalküle"), die den Möglichkeitsraum des mathematischen Beweisens sehr genau wiedergeben. Dies hatte Zweierlei zur Folge: Erstens konnte man nun den Möglichkeitsraum des mathematischen Beweisens selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchung machen - daraus entstand die Metamathematik, und zweitens hatte man in den Zeichenreihen und Transformationsregeln eine Grundlage für die Mathematik gefunden, die unbezweifelbar und unveränderlich ist (so lange wir uns darauf verlassen können, dass es eine alphabetische Schrift gibt, einschließlich einer physischen Möglichkeit zum Schreiben und Lesen, und Menschen, die es verstehen, mit Zeichenreihen und Transformationsregeln umzugehen).

Mathematik beantwortet nach diesem Selbstverständnis nur eine einzige Art von Fragen: lässt sich diese Zeichenreihe im Rahmen jenes Kalküls mittels dessen Transformationsregeln herstellen? So bald jemand einen Herstellungsweg ("Beweis") gefunden hat, und dieser mehrfach geprüft und für korrekt befunden wurde, ist die Antwort Ja, und sie bleibt für immer Ja. Andernfalls bleibt die Frage offen. Das ist so etwas wie ein Patience- oder Solitaire-Spiel, das mit Zeichenreihen anstelle von Spielkarten gespielt wird. Man hat eine Liste von Regeln, nach denen man Karten umlegen darf, und durch Mischen und Auslegen wird eine Anfangslage hergestellt. Die Legeregeln und die Ausgangslage zusammen entsprechen dem Kalkül. Das Ziel ist, die Karten in vier Stapel mit getrennten Farben und aufsteigenden Kartenwerten zu legen; dies entspricht dem zu beweisenden Satz. Entweder die Patience geht auf, oder sie geht nicht auf. Wenn sie einmal aufgegangen ist, geht sie auch immer wieder auf. Das ist ein endgültiges Wissen. Es kann natürlich sein dass man den Lösungsweg einmal gefunden und dann wieder vergessen hat. Das hat es auch in der Mathematik gegeben, dass ein genialer Mathematiker am Rand einer Buchseite eine Notiz hingekritzelt hat, er habe den Beweis gefunden, und die Nachwelt rätselt jahrzehntelang und findet ihn nicht wieder. Damit sind

die beiden eingangs aufgeworfenen Fragen beantwortet.

Natürlich sind die Kalküle der Mathematik in aller Regel so gestaltet, dass sie für Anwendungen offen sind. Die gängigsten Kalküle sind dreischichtig: Schicht 1 enthält die Regeln der Grammatik, die Zeichenkategorien wie Konstantenzeichen, Variablenzeichen, Prädikatzeichen, Relationszeichen etc. einführt und damit den Begriff der Aussage etabliert. Schicht 2 enthält die Regeln der Logik, wodurch die Begriffe "wahr" und "falsch" eingeführt werden, und die Möglichkeit zum Herleiten wahrer Aussagen aus anderen wahren Aussagen. Schicht 3 enthält die Axiome, welche die spezielle Struktur festlegen, die mit dem Kalkül untersucht werden soll. In einer Anwendung der Mathematik werden die Zeichen des Kalküls den Gegenständen, Eigenschaften, Relationen etc. des Anwendungsfelds zugeordnet, was man "Interpretation" nennt. So bald eine Interpretation gefunden ist, derart dass die Axiome des Kalküls unter dieser Interpretation wahre Aussagen über das Anwendungsfeld sind, werden aus den bewiesenen mathematischen Sätzen inhaltliche Aussagen über das Anwendungsfeld. In einem solchen Kontext sagt die Mathematik etwas über die "Wirklichkeit" aus.

Der problematische Vorgang ist natürlich derjenige des Interpretierens. Die Buchstaben des Alphabets (als abstrakte Entitäten) scheinen etwas zu haben, das ich Identität nenne: Einheit, Unterschiedenheit und Dauer. Sie sind starr und unveränderlich. A ist A und B ist B , basta. Dies vererbt sich auf alle Zeichenreihen, und auch auf alle mathematischen Entitäten: auch sie sind starr und unveränderlich. Da muss man einen Aspekt der Wirklichkeit schon ganz schön hin trimmen, damit er sich als Interpretation für eine starre und unveränderliche Struktur eignet (man sagt Idealisieren statt Hintrimmen, das klingt schöner). Und nur über diese hingetrimmte Version von Wirklichkeit sagt die Mathematik im Kontext ihrer Anwendung etwas aus.

Mit viel Liebe

Rudi